Project Wetenschappelijk Programmeren

september 2011

We werken in het interval $[-1,1]$. Genereer een random getal b in $]0,1[$ en voer een duizendtal keer het volgende experiment uit (geef je seed op en de gebruikte random number generator zodat alles herhaalbaar en verifieerbaar is).

Beschouw voor een (verderop) gegeven functie $f \in C([-1,1])$ het veelterminterpolatieprobleem van graad 3 door de interpolatiepunten $x_0 = -1, x_1 = -b, x_2 = b, x_3 = 1$. Schrijf de veelterminterpolant in zijn Lagrange vorm

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\ell_i(x), \qquad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Plot nu de functies $\ell_i(x), 0 \leq i \leq 3$ en de functie

$$\sum_{i=0}^{3} |\ell_i(x)|$$

en bekijk haar typische vorm met 3 lokale maxima. Bereken

$$\Lambda_3 = \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{3} |\ell_i(x)|$$

door eerst de 3 nulpunten van de afgeleide functie numeriek te berekenen met een daarvoor geschikte methode. Deze Λ_3 geldt als het conditiegetal van veelterminterpolatie in Lagrangevorm.

Bereken nu voor

$$f(x) = \arctan(x), \qquad g(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

de partiëelsom $s(x)$ van graad 3 van de Chebyshev reeksontwikkeling van $f(x)$ en de Chebyshev economizatie $t(x)$ van een hogere graad naar graad 3 voor $g(x)$. Er geldt tevens voor de veelterminterpolant $p(x)$ van enerzijds $f(x)$ en anderzijds $g(x)$ dat

$$\max_{x\in[-1,1]} |(f-p)(x)| \leq (1+\Lambda_3) \max_{x\in[-1,1]} |(f-s)(x)|,$$
$$\max_{x\in[-1,1]} |(g-p)(x)| \leq (1+\Lambda_3) \max_{x\in[-1,1]} |(g-t)(x)|.$$

Verifieer deze ongelijkheden benaderend door de continue maxima over het interval $[-1,1]$ te vervangen door een discreet maximum over een (voldoende) groot aantal punten in het interval.

Voor welke b in je duizendtal runs bekwam je de kleinste Λ_3? Is deze dezelfde voor $f(x)$ en $g(x)$ en waarom?