2.9.3 Als c een eigenwaarde van A is dan is V_c een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Bewijs

$A.0 = c.0 = 0 \Rightarrow 0 \in V_c V_c \neq \phi$

Zij $v_1, v_2 \in V_c$,$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$A(a_1u_1+a_2u_2) = a_1Av_1+a_2Av_2 = a_1cv_1+a_2cv_2 = c(a_1v_1+a_2v_2) \Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 \in V_c$

Opmerking $V_c \neq 0$ (nulruimte) en dus $dim(V_c) > 0$

Spectraalformule: $A = d_1v_1{}^tv_1 + ... + d_nv_n{}^tv_n$

Bewijs

Stel ${}^tA = A$

Stel $c_1, c_2, ..., c_t$alle verschillende eigenwaarden van A.

Dan $\mathbb{R}^n = V_{c_1} + V_{c_2} + ... + V_{c_t}$.

Kies $B_i \subset V_{c_i}$ orthonormale basis voor V_{c_i}.

Als $i \neq j$ en $u \in B_i$ en $v_j \in B_j \Rightarrow u_i \perp v_j \Rightarrow B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_t$ orthonormale basis voor R^n.

Definieer $B = \{u_{1,}, ..., u_n\}$ $(\forall i : \exists j, u_i \in B_j)$

Stel $A_{u_i} = d_iu_i$ $(d_i \in \{c_i, ..., c_t\})$

Stel $U = [u_i, ..., u_n] \in GL_n(\mathbb{R})$

$$AU = U\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} \Rightarrow U \begin{matrix} d_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & d_n \end{matrix} U^{-1}$$

$\{u_1, ..., u_n\}$ orthonormale basis

$$\begin{cases} ||u_1||^2 = 1 & \Rightarrow^t u_iu_i = 1 \\ \forall i \neq j : u_i \perp u_j & \Rightarrow^t u_iu_j = 0 \end{cases}$$

$$\forall i, j :^t u_iu_j = \delta_{i,j} \Rightarrow^t u.u = I_n \Rightarrow^t U = U^{-1} \Rightarrow U\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix}{}^tU \Rightarrow$$

$$A = [u_1, ..., u_n]\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} {}^tu_1 \\ ... \\ {}^tu_n \end{vmatrix} = [d_1u_1, ..., d_nu_n]\begin{vmatrix} {}^tu_1 \\ ... \\ {}^tu_n \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$A = d_1v_1{}^tv_1 + ... + d_nv_n{}^tv_n$